

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
3.	Направленность (профили)	Математика. Физика
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.В.01.04 Методика решения задач повышенной сложности по математике
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2022

I. Методические рекомендации

1.1 Методические рекомендации по организации работы студентов во время проведения лекционных занятий

- В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы, дает рекомендации для практического занятия и указания для выполнения самостоятельной работы.
- В ходе лекционных занятий обучающемуся необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание изучаемой дисциплины, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве.
- Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Рекомендуется активно задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

1.2 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

- На практическом занятии студенты решают задачи под руководством преподавателя. Семинар проводится по узловым и наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной программы.
- Практические занятия посвящены изучению наиболее важных тем учебной дисциплины. Они служат для закрепления изученного материала, развития умений и навыков подготовки докладов, сообщений, приобретения опыта устных публичных выступлений, ведения дискуссии, аргументации и защиты выдвигаемых положений, а также для контроля преподавателем степени подготовленности студентов по изучаемой дисциплине.
- В ходе подготовки к практическим занятиям следует изучить основную и дополнительную литературу, учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы.
- Можно подготовить свой конспект ответов по рассматриваемой тематике, подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на занятие. Следует продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной практикой. Можно дополнить список рекомендованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы.

1.3 Методические рекомендации к самостоятельной работе

- Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

- Самостоятельная работа студентов (далее – СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. СРС играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.
- К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом СРС играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.
- В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.
- Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:
 - изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
 - подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
 - участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.
- Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.
- Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях.

Чтение учебника

- Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, производя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.
- Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.
- Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательств сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.
- При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. д. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.
- Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.
- Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Самопроверка

- После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, даны с целью помочь студенту в повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить ряд задач.

- Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

1.4 Проведение занятий в интерактивной форме

- Интерактивное обучение представляет собой способ познания, осуществляемый в формах совместной деятельности обучающихся, т.е. все участники образовательного процесса взаимодействуют друг с другом, совместно решают поставленные проблемы, моделируют ситуации, обмениваются информацией, оценивают действие коллег и свое собственное поведение, погружаются в реальную атмосферу делового сотрудничества по разрешению проблем.
- Интерактивная форма обучения реализуется в виде коллективных решений творческих задач.
- Коллективные решения творческих задач. Под творческими заданиями понимаются такие учебные задания, которые требуют от обучающихся не простого воспроизводства информации, а творчества, поскольку задания содержат больший или меньший элемент неизвестности и имеют несколько подходов, несколько методов решения.

1.5 Методические рекомендации по решению задач, в том числе дополнительных

- Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал.
- При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать из них самый лучший. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.
- Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.
- Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения.
- В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т. п.
- Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.
- Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.
- Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Само решение следует сопровождать необходимыми расчетами и пояснениями с указанием применяемых формул, анализом и выводами.
- Работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво без помарок, зачеркиваний и сокращений слов.

1.6 Методические указания по подготовке к решению кейсов – практических ситуаций

- Кейс (в переводе с англ. – случай) представляет собой проблемную ситуацию, предлагаемую студентам в качестве задачи для анализа и поиска решения. Обычно кейс содержит схематическое словесное описание ситуации, статистические данные, а также мнения и суждения о ситуациях, которые трудно предсказать или измерить. Кейс, охватывает такие виды речевой деятельности как чтение, говорение и письмо.
- Кейсы наглядно демонстрируют, как на практике применяется теоретический материал. Данный материал необходим для обсуждения предлагаемых тем, направленных на развитие навыков общения и повышения профессиональной компетенции. Зачастую в кейсах нет ясного решения проблемы и достаточного количества информации.
- Анализ кейса должен осуществляться в определенной последовательности:
 - Выделение проблемы.
 - Поиск фактов по данной проблеме.
 - Рассмотрение альтернативных решений.
 - Выбор обоснованного решения.

1.7 Методические рекомендации по выполнению домашних и индивидуальных заданий

- Домашние задания по курсу выполняются обучающимися самостоятельно в отдельной тетради или в тетради для практических занятий.

- Домашние задания ориентированы на закрепление теоретического материала, изученного в ходе лекционного занятия и отработанного на практических занятиях по каждой теме курса.
- При выполнении домашнего задания обучающийся должен повторить теоретический материал лекции по данной теме; разобрать задания, выполненные на практическом занятии; записать условие задания в тетрадь; полно и с обоснованием действий выполнить решение заданий; при необходимости привести необходимые уточнения (формулы, теоремы, утверждения), на основе которых проводилось решение; записать ответ или вывод.
- Все индивидуальные задания необходимо защитить в устной форме, ответив на вопросы преподавателя по выполнению заданий и обоснованию приведенного решения.

1.8 Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

- Контрольные работы по данной дисциплине выполняются в отдельных тетрадях для контрольных работ или на отдельных листах, которых хранятся у преподавателя; в них же обучающийся выполняет работу над допущенными ошибками в случае неудовлетворительного выполнения контрольной работы или дополнительное задание для допуска к пересдаче контрольной работы.
- Контрольная работа считается зачтенной, если правильно выполнено не менее 60% заданий.
- Задания контрольной работы выполняются аккуратно, последовательно, обоснование решения и ответ обязательны в каждом задании.
- При написании работы можно использовать черновик.
- При выполнении контрольных работ не допускается использование мобильных устройств, гаджетов, калькуляторов, учебной литературы.

1.9 Методические рекомендации по подготовке к сдаче зачета

- Зачет осуществляется в рамках завершения изучения дисциплины и позволяет определить качество усвоения изученного материала, а также степень сформированности компетенций.
- Студенты обязаны сдавать зачет в строгом соответствии с утвержденными учебными планами, разработанными согласно образовательным стандартам высшего образования.
- По данной дисциплине зачет принимается по практической части курса. Задания, предлагаемые на зачете, соответствуют оценочным средствам для промежуточной аттестации обучающихся по предмету.
- Студент обязан не только представить правильно выполненные задания, но и защитить свое решение.
- Преподавателю предоставляется право задавать студентам вопросы по решению заданий практической части с целью выявления глубины понимания изученного материала и степени самостоятельности выполнения заданий.
- При явке на зачет студенты обязаны иметь при себе зачетную книжку, которую они предъявляют преподавателю в начале зачета.
- Рекомендуется при подготовке к зачету опираться на следующий план:
 1. Повторить теоретическую часть курса.
 2. После работы над теорией необходимо ответить на вопросы для самоконтроля.
 3. Повторить методы, способы и приемы решения задач по всем темам курса, опираясь на задания, которые решались на практических занятиях и предлагались для самостоятельной работы.
 4. Решить типовые задания по данной теме.

II. Планы практических занятий

Тема 1. Делимость. Простые и составные числа. Принцип Дирихле (6 часов)

План:

1. Натуральные числа. Простые и составные числа.
2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
3. Делимость. Признаки делимости. Свойства делимости. Деление с остатком.
4. Принцип Дирихле и делимость целых чисел. Принцип Дирихле в геометрии.
5. Метод математической индукции.
6. Применение метода математической индукции для доказательства равенств.
7. Применение метода математической индукции для доказательства неравенств.
8. Применение метода математической индукции для решения задач на делимость.

Литература: [2, с. 17-121]; [3, с. 10-33]; [4, с. 5-36].

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача. Сумма цифр натурального числа A равна сумме цифр числа $3A$. Докажите, что:

- I подзадача. А делится на 3.
- II подзадача. А делится на 9.
- III подзадача. Верно ли, что А обязательно делится на 27.

Задания для самостоятельной работы:

1. Доказать, что из любых 5 целых чисел можно найти 3, сумма которых делится на 3.
2. Доказать, что если p – простое число и $p > 3$, то число $p^2 - 1$ делится на 24.
3. Если $x^2 + y^2$ делится на 3 и x, y целые, то x и y делятся на 3. Доказать.
4. Доказать, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.
5. Найти такие четыре разных целых числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое.
6. Найти наибольший общий делитель чисел $2n + 3$ и $n + 7$.
7. Доказать, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ – несократима.
8. Сумма четырёх натуральных чисел равна 1995. Какое наименьшее значение может принимать их НОК (наименьшее общее кратное)?
9. Выяснить, при каких натуральных значениях n число $n^5 - n$ делится на 120.
10. Доказать, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.
11. Трёхзначное число \overline{abc} делится на 37. Докажите, что сумма чисел \overline{bca} и \overline{cab} также делится на 37.
12. Положительное число X таково, что $x^2 + x^{-2} = 7$. Докажите, что число $x^5 + x^{-5}$ – целое, и вычислите его.

Тема 2. Уравнения, системы уравнений. Функциональные уравнения (6 часов)

План:

1. Деление многочленов и теорема Безу.
2. Корни многочлена и теорема Виета.
3. Уравнения в целых числах.
4. Системы уравнений в целых числах.
5. Диофантовы уравнения.
6. Целая часть числа. Дробная часть числа. Задачи с целой частью.

Литература: [1, с. 7-163]; [2, с. 126-346, 391-430]; [3, с. 46-109]; [4]; [5, с. 12-21, 89-320]; [6, с. 14-40].

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача. Решить уравнение: $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+4x} + \sqrt{x^2+y^2-2y-3} = \sqrt[4]{x^4-16} - y + 5$.

– I подзадача. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72, \\ (y+z)(x+y+z) = 120, \\ (z+x)(x+y+z) = 96. \end{cases}$$

– II подзадача. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 185, \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 65. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы.

1. Решить уравнение: $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$.
2. Решить уравнение: $(x+2)^4 + x^4 = 82$.
3. Решить уравнение: $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$.
4. Решить уравнение: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
5. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a}, \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = c + \frac{1}{c}. \end{cases}$$

6. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \cos^2 z = 2. \end{cases}$$
7. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + xy + y = b. \end{cases}$$
8. Докажите, что из 100 целых чисел можно выбрать несколько чисел так, что их сумма будет делиться на 100.
9. Докажите, что для каждого простого числа, большего пяти, существует число вида $11\dots 1$, делящееся на это число.
10. Докажите, что если натуральные числа a и b взаимно просты, то найдётся такое натуральное k , что $a^k - 1$ делится на b .
11. Найдите наибольшее число C такое, что при всех x выполняется неравенство $x^2 \geq C[x]\{x\}$. ($[x]$ – целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x ; $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x , $0 \leq \{x\} < 1$.)
12. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD . Известно, что центр окружности, вписанной в треугольник BCD , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите углы треугольника ABC .

Тема 3. Квадратный трёхчлен. Уравнения в целых числах (6 часов)

План:

1. Выделение полного квадрата из квадратного трёхчлена.
2. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.
3. Решение квадратных неравенств.
4. Зависимость расположения графика функций квадратного трёхчлена от a , D .
5. Равносильность и следствия в задачах с квадратным трёхчленом.
6. Свойства функций, применяемые при решении уравнений и неравенств.
7. Рациональные неравенства.
8. Уравнения и неравенства, системы и совокупности, методы их решения.
9. Равносильность уравнений, неравенств, систем.
10. Линейные уравнения и неравенства.
11. Решение линейных неравенств.
12. Квадратный трёхчлен. Корни квадратного трёхчлена.
13. Метод интервалов при решении неравенств.
14. Экстремумы. Оценки.
15. Различные свойства функций.
16. Функциональные уравнения.

Литература: [1, с. 164-263]; [2, с. 431-439]; [3, с. 147-155]; [4, с. 77-130, 135-162], [5, с. 28-46, 91-110].

Пример кейс-задания для коллективного решения:

– I подзадача. Решить уравнение:

1. $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

2. $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.

– II подзадача. Разложить на множители:

$x^8 + x^4 + 1$.

$x^8 + x + 1$.

$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$.

– III подзадача. Найти сумму:

1. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2. $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$.

3. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$.

- IV подзадача. У доски 8×8 часть клеток покрашена в чёрный цвет, а остальные - в белый. Одним ходом любые три клетки, образующие "уголок" (квадрат 2×2 , из которого удалена одна клетка), можно перекрасить в противоположный цвет. Докажите, что за несколько ходов всю доску можно перекрасить в белый цвет.
- V подзадача. Прямоугольник размера 19×93 (большая сторона горизонтальна) разделён прямыми, параллельными его сторонам, на единичные квадратики. Первоначально в левом нижнем квадрате стоит фишка. Двое школьников играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается передвинуть фишку на любое количество квадратиков вверх или вправо. Школьник, который не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?
- VI подзадача. Найти наименьшее натуральное число n , такое, что число $n!$ делится на 990.

Задания для самостоятельной работы.

1. Решить уравнение: $f\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2f(x+1) = x+1$.
2. Разложить на множители: $x^8 + x^7 + 1$.
3. Разложить на множители: $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$.
4. Найти сумму: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}$.
5. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4} = 1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.
6. Функция $f(x)$, которая определена на всей прямой, такова, что $2f(x) + f(1-x) = 3x^2$. Найти $f(5)$.
7. Если для сторон a, b, c треугольника выполняется соотношение $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, то один из углов треугольника равен 60° . Доказать это.
8. Найти корни уравнения $(x^{2k} + 1)(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2k-2}) = 2kx^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.
9. Среди 5 монет одна фальшивая. Известно, что она отличается от настоящих монет весом, но неизвестно, легче она или тяжелее. Масса настоящей монеты 5г. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах обнаружить фальшивую монету, имея одну гирию массой 5г.
10. Найти множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют неравенству $2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2} - (1-x^2)(1-y^2) > 0$.
11. Найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sin \pi(x^2 + y^2) \leq 0$.
12. Решить уравнение $\arcsin x(x+y) + \arcsin y(x+y) = \pi$.
13. Если сторона треугольника меньше среднего арифметического двух других его сторон, то угол, лежащий против этой стороны, меньше чем среднее арифметическое двух других его углов. Доказать это.
14. Пусть AB – диаметр окружности с центром в точке O , а P – точка, лежащая внутри окружности. Хорды AQ и BR пересекаются в точке P . Пусть X – точка пересечения радиуса OQ с хордой BR , а Y – точка пересечения радиуса OR с хордой AQ . Указать все точки P такие, что вокруг четырёхугольника $OXPY$ можно описать окружность.
15. Вычислите сумму $a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \underbrace{\overline{a\dots aa}}_n$ ($a \leq 9$).
16. Девять многоугольников площадью 1 м^2 расположены внутри круга площадью 5 м^2 . Докажите, что по крайней мере два из них имеют общую часть, площадь которой не меньше, чем $1/9 \text{ м}^2$.
17. Докажите, что при любом целом $k \geq 0$ $2^{6k+1} + 3^{6k+1} + 5^{6k} + 1$ делится на 7.
18. Найдите сумму n слагаемых $\arctg \frac{1}{1+1+1^2} + \arctg \frac{1}{1+2+2^2} + \arctg \frac{1}{1+3+3^2} + \dots + \arctg \frac{1}{1+n+n^2}$.
19. Выполните умножение $(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1) \dots (x^{2^n} - x^{2^{n-1}} + 1)$.

20. Вычислите сумму $S_n = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$.